CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2016

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

miejsce na naklejkę

dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **3 czerwca 2016 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**

CZAS PRACY: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 22 strony (zadania 1–17). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–5) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniach kodowanych (6–7) wpisz właściwe cyfry w kratkach umieszczonych pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (8–17) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj <u>tylko długopisu lub pióra</u> z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
10. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
11. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-R1_1P-163

MMA 2016

W zadaniach od 1. do 5. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\left|3+5^{3-x}\right|-1$ dla każdej liczby rzeczywistej. Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(2,+\infty)$ **B.** $\langle 1,3\rangle$ **C.** $\langle -1,+\infty)$ **D.** $(0,+\infty)$

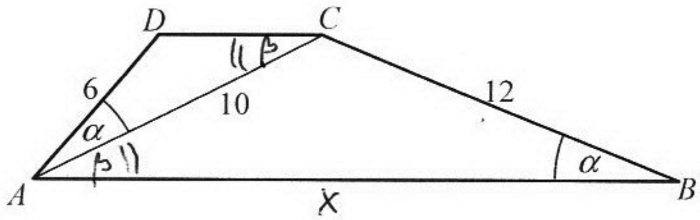
Zadanie 2. (0–1)

Wartość wyrażenia $\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ$ jest równa

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 3. (0–1)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są: $|AD|=6$, $|BC|=12$, $|AC|=10$ oraz $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle CAD|$ (zobacz rysunek).



Wówczas długość podstawy AB tego trapezu jest równa

A. $|AB|=18$ **B.** $|AB|=20$ **C.** $|AB|=22$ **D.** $|AB|=24$

Zadanie 4. (0–1)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Wynika stąd, że cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Zadanie 5. (0–1)

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-7n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** 0 **D.** $+\infty$

Zadanie 6. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

9	2	3

Zadanie 7. (0–2)

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Oblicz $P(B \setminus A)$, gdzie zdarzenie $B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B i A. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

3	1	4

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

ZAD. 6.

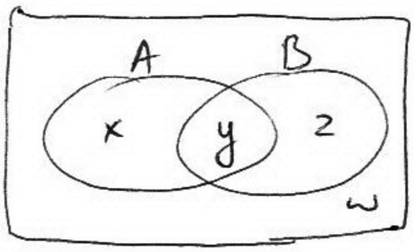
$a_1 = q$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{q}{1-q} = 12$

$q = 12(1-q)$

$q = \frac{12}{13} = 0,\boxed{923}07\ldots$

ZAD. 7.



$x + y + z + \omega = 1$

$\underbrace{x + y} + z = \frac{3}{5} = \frac{21}{35}$

$x + y = \frac{2}{7} = \frac{10}{35}$

$\frac{10}{35} + z = \frac{21}{35}$

$z = \frac{11}{35}$

$P(B \setminus A) = z = \frac{11}{35} = 0,\boxed{314}2\ldots$

Zadanie 8. (0–4)

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

(Z) $a, b, c, d > 0$

(T) $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geqslant \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$

(D) $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geqslant \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \quad /()^2$

$(a+b)(c+d) \geqslant ac + 2\sqrt{abcd} + bd$

$\cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} \geqslant \cancel{ac} + 2\sqrt{abcd} + \cancel{bd}$

$ad - 2\sqrt{abcd} + bc \geqslant 0$

$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geqslant 0$

Kwadrat dowolnego wyrażenia jest zawsze nieujemny. cnd.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność $\left|x^2-3x+2\right| \ge |x-1|$.

$$|(x-2)(x-1)| - |x-1| \geqslant 0$$

$$|x-2| \cdot |x-1| - |x-1| \geqslant 0$$

$$\cancel{|x-1| \geqslant} \quad |x-1|\left(|x-2|-1\right) \geqslant 0$$

$|x-1| \geqslant 0$ zawsze, zatem

$$|x-2|-1 \geqslant 0$$

$$|x-2| \geqslant 1$$

$$x-2 \geqslant 1 \lor x-2 \leq -1$$

$$x \geqslant 3 \lor x \leq 1$$

$$x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$$

Zadanie 10. (0–3)

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

$a_4 = 4$

$a_{n+1} = a_n + n - 4$

$a_4 = a_3 + 3 - 4 = a_3 - 1 = 4$

$a_3 = 5$

$a_3 = a_2 + 2 - 4 = a_2 - 2 = 5$

$a_2 = 7$

$a_2 = a_1 + 1 - 4 = a_1 - 3 = 7$

$\underline{\underline{a_1 = 10}}$

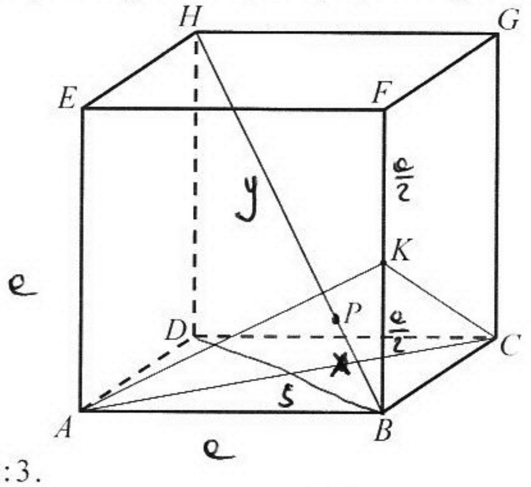
ciąg jest malejący, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$

$a_{n+1} = a_n + n - 4$

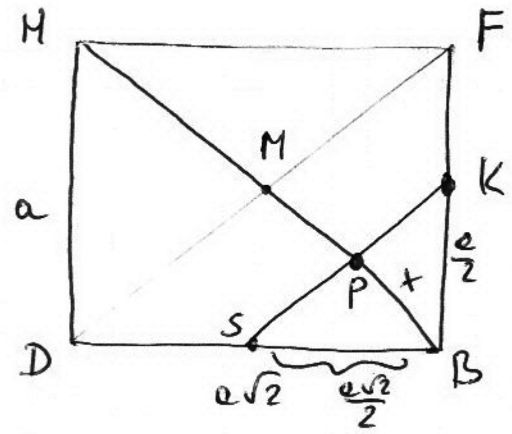
$a_{n+1} - a_n = n - 4$

wyrażenie $(n-4)$ może przyjmować wartości dodatnie, ujemne i równe zero. Zatem ciąg ten nie jest monotoniczny. (czyli nie jest malejący)

Zadanie 11. (0–3)
Dany jest sześcian *ABCDEFGH*. Przez wierzchołki *A* i *C* oraz środek *K* krawędzi *BF* poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną *BH* w punkcie *P* (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP|:|HP| = 1:3$.



(T) $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

(D) $x + y = a\sqrt{3}$

$$|SK| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle DFB \sim \triangle SKB$$

$$\frac{|DF|}{|SK|} = \frac{|MB|}{|PB|}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{x}$$

$$x = \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{1}{a\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a\sqrt{3}}{4}}} \Rightarrow |HP| = y = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}a\sqrt{3}}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}a\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

cnd.

Zadanie 12. (0–4)
Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania
$$k^2x^2+(k-1)x+1=0,\text{ gdzie } k\neq 0.$$
Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=2^m$.

??

$f(k)=2^m$

$$\begin{cases} ① & a\neq 0 \\ ② & \Delta>0 \\ ③ & \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=m \end{cases}$$

① $a\neq 0 \Rightarrow \underline{k\neq 0}$

② $\Delta=(k-1)^2-4k^2\cdot 1 = k^2-2k+1-4k^2=-3k^2-2k+1$

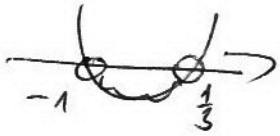
$-3k^2-2k+1>0$

$3k^2+2k-1<0$

$\Delta=4+12=16 \quad \sqrt{\Delta}=4$

$k_1=\frac{-2-4}{6}=-1$

$k_2=\frac{-2+4}{6}=\frac{1}{3}$



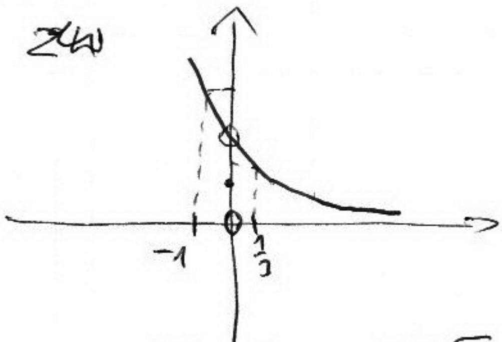
$k\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

③ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=\frac{-(k-1)}{1}=\underline{-k+1}$

$f(x)=2^m=2^{-k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ i $k\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ i $k\neq 0$

ZW



$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$

$f(0)=2$

Odpowiedź: ZW: $(\sqrt[3]{4},4)-\{2\}$

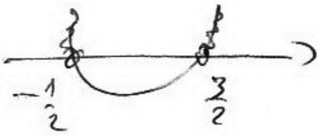
MMA_1R

Zadanie 13. (0–3)
Rozwiąż nierówność $(2\sin x-3)(2\sin x+1)>0$ w przedziale $x\in(0,2\pi)$.

$\sin x = t \quad , t\in\langle -1,1\rangle$

$(2t-3)(2t+1)>0$

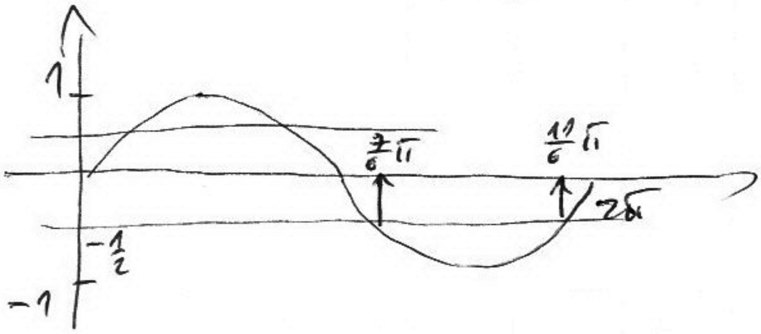
$\frac{3}{2} \qquad -\frac{1}{2}$



$t<-\frac{1}{2} \quad \vee \quad t>\frac{3}{2}$

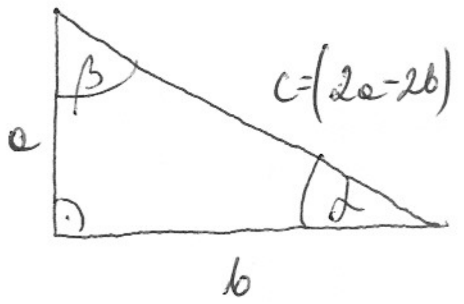
$\sin x<-\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x>\frac{3}{2}$

$x\in\emptyset$



$x\in\left(\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$

Zadanie 14. (0–4)
W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.



$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2(a-b)$$

$$a^2+b^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$$

$$3a^2 + 3b^2 - 8ab = 0 \quad / : b^2$$

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0$$

$$\frac{a}{b} = t \ , \ t > 0 \quad (i \ a > b \Rightarrow t > 1)$$

$$3t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 36 = 28$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$

$$t_1 = \frac{8-2\sqrt{7}}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{3} < 1$$

$$t_2 = \underline{\underline{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{2(a-b)} = \frac{1}{\frac{2(a-b)}{b}} = \frac{1}{2\frac{a}{b} - 2} = \frac{1}{2\cdot\frac{4+\sqrt{7}}{3} - 2} = \text{itd}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{2(a-b)} = \frac{1}{\frac{2a-2b}{a}} = \frac{1}{2 - 2\frac{b}{a}} = \frac{1}{2 - 2\cdot\frac{3}{4+\sqrt{7}}} = \text{itd.}$$

Zadanie 15. (0–4)
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\{2, 4, 6, 8, 0\}$

np. N P N N P czyli 3 l. niep. i 2 l. parzyste

1° na pierwszym miejscu jest l. nieparzysta:

N _ _ _ _

$$5m \cdot C_4^2 \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{tyle możliwości mają 2 l. niep.}} \cdot \overbrace{5 \cdot 5}^{\text{pozostałe 2 l. muszą być parzyste.}}$$

C_4^2 – wybór 2 miejsc dla pozostałych l. niep.

$$5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^5$$

2°. na I miejscu stoi l. parzysta (oprócz 0)

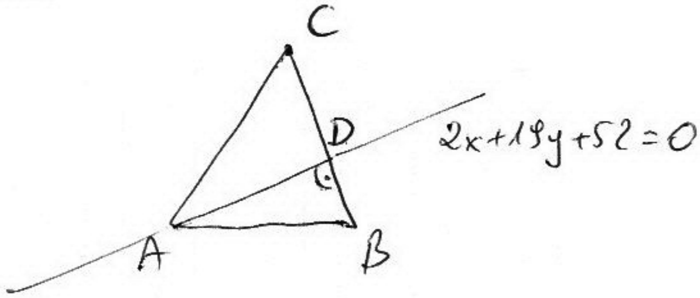
P _ _ _ _

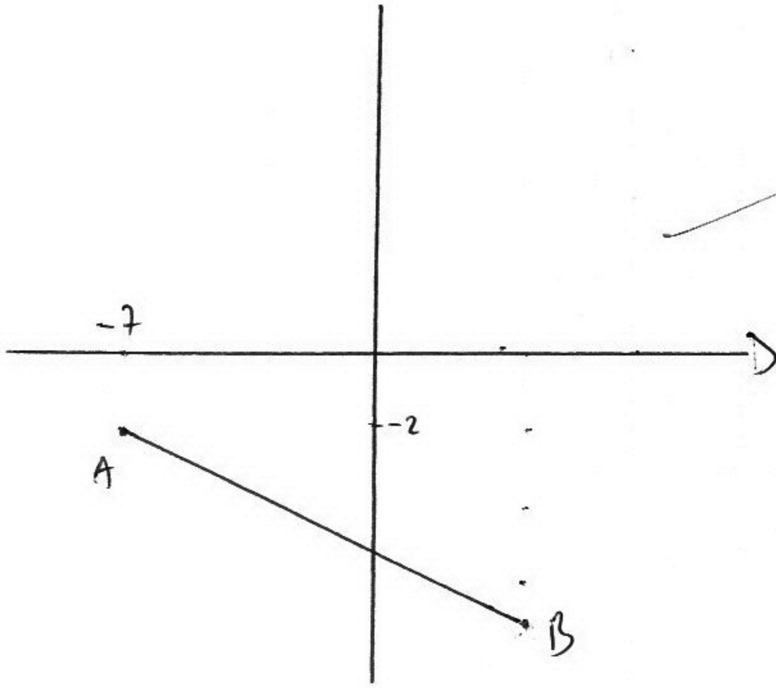
$$4 \cdot \underbrace{C_4^3 \cdot 5^3}_{\text{ustawienie 3 l. niep.}} \cdot \underbrace{5}_{\text{l. poz.}} = 4 \cdot 4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 5^4$$

Razem $6 \cdot 5^5 + 16 \cdot 5^4 =$ ___

Zadanie 16. (0–5)

Punkty $A=(-7,-2)$ i $B=(4,-7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.





Pr. AD: $\perp$ Pr. BC

Pr. AD:

$$y=-\frac{2}{19}x-\frac{52}{19}$$

$$a_{\perp}=\frac{19}{2}$$

Pr. BC: $y=\frac{19}{2}x+b$ i $B(4,-7)$

$$-7=\frac{19}{2}\cdot 4+b$$

$$-7=38+b$$

$$b=-45$$

$$\underline{y=\frac{19}{2}x-45}$$

$$\Downarrow$$

$$C\left(x,\ \frac{19}{2}x-45\right)$$

$$|AC|=|BC|$$

$$|AC|=\sqrt{(x+7)^2+\Big(\frac{19}{2}x\underbrace{-45+2}_{-43}\Big)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+14x+49+\frac{361}{4}x^2-817x+1849}$$

$$|BC|=\sqrt{(x-4)^2+\left(\frac{19}{2}x-45+7\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-8x+16+\frac{361}{4}x^2-722x+1444}$$

$$|AC|=|BC| \quad /()^2$$

$$\cancel{x^2}+14x+49+\frac{361}{4}x^2-817x+1849=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{\frac{361}{4}x^2}-722x+1444$$

$$-73x=-438$$

$$\underline{\underline{x=6}} \Rightarrow y=\frac{19}{2}\cdot 6-45=12$$

Odp. $C(6,12)$

Zadanie 17. (0–7)
Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

$P_c = 2\pi$

$V_{MAX} = ?$

$r_{MAX} = ?$

$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \quad / : 2\pi$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$r^2 + rh = 1$

$rh = 1 - r^2$

$h = \frac{1-r^2}{r}$

$D: 1 - r^2 > 0 \wedge r > 0$

$r \in (0, 1)$

$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r}$

$V(r) = \pi r(1 - r^2) = \pi(-r^3 + r)$

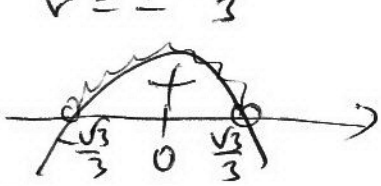
$V'(r) = \pi(-3r^2 + 1)$

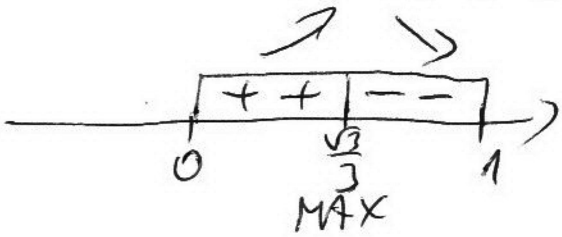
$V'(r) = 0 \iff -3r^2 + 1 = 0$

$r^2 = \frac{1}{3}$

$r = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V'(r) > 0 \iff$





$r_{MAX} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V_{MAX} = \pi\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$V_{MAX} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$