OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

MATERIAŁ ĆWICZENIOWY Z MATEMATYKI

STYCZEŃ 2014

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy 170 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 10 stron.
2. W zadaniach od 1. do 20. są podane 4 odpowiedzi: A, B, C, D, z których tylko jedna jest prawdziwa. Wybierz tylko **jedną** odpowiedź i zaznacz ją.
3. Rozwiązania zadań od 21. do 30. zapisz starannie i czytelnie w wyznaczonych miejscach. Przedstaw swój tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie.
5. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
6. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie

50 punktów

Życzymy powodzenia!

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 23. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. ***(1 pkt)***

Dane są liczby $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 3 - \sqrt{5}$. Iloraz $\frac{x}{y}$ można zapisać w postaci:

A. $8\sqrt{5}$ **B.** $\frac{7\sqrt{5} - 9}{4}$ **C.** $\frac{-5\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{11}{4} + \frac{5}{4}\sqrt{5}$

Zadanie 2. ***(1 pkt)***

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x - 2| > 7$ jest:

A. $(2, 9)$ **B.** $(-5, 9)$ **C.** $(-\infty, -5) \cup (9, \infty)$ **D.** $(-\infty, -5\rangle \cup \langle 9, \infty)$

Zadanie 3. ***(1 pkt)***

Jeżeli $\log_x \frac{1}{64} = -4$, to liczba x jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 4. ***(1 pkt)***

Aby otrzymać wielomian $W(x) = x^3 + 8$, należy pomnożyć wielomian $P(x) = x + 2$ przez wielomian:

A. $Q(x) = x^2 + 4$ **B.** $Q(x) = x^2 - 2x + 4$ **C.** $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ **D.** $Q(x) = x^2 + 2x + 4$

Zadanie 5. ***(1 pkt)***

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \sqrt{2} \cdot x - \frac{\sqrt{8}}{4}$ jest liczba:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** -2 **D.** 2

Zadanie 6. ***(1 pkt)***

Najmniejszą liczbą naturalną, która nie spełnia nierówności $x^2 - 7x - 5 < 0$ jest:

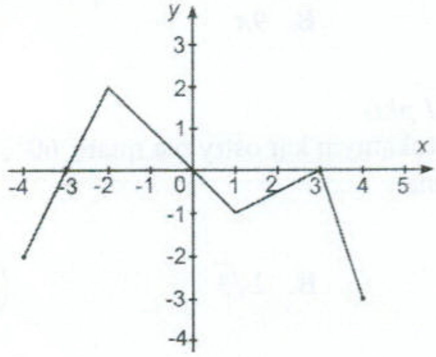
A. 0 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 8

Zadanie 7. ***(1 pkt)***

Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

A. 18 **B.** –18 **C.** 9 **D.** $18\sqrt{2}$

Zadanie 8. **(*1 pkt*)**
Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji $y = f(x)$, określonej dla $x \in \langle -4, 4\rangle$. Zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie, to zbiór:



A. $\langle 0, 3) \cup (3, 4\rangle$

B. $\langle -4, -3\rangle \cup \langle 0, 4\rangle$

C. $(-4, -3) \cup (0, 3) \cup (3, 4)$

D. $(-2, 1) \cup (3, 4)$

Zadanie 9. **(*1 pkt*)**
Trzydziesty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 4, a trzydziesty piąty wyraz tego ciągu jest równy 7. Wówczas różnica ciągu (a_n) jest równa:

A. 5 **B.** 3 **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{3}{5}$

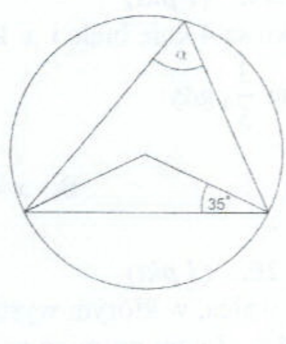
Zadanie 10. **(*1 pkt*)**
Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = 64$ i $q = -\frac{1}{2}$. Wówczas:

A. $a_5 = -4$ **B.** $a_5 = 4$ **C.** $a_5 = 2$ **D.** $a_5 = -2$

Zadanie 11. **(*1 pkt*)**
W trójkącie prostokątnym o bokach 6, 8, 10, tangens najmniejszego kąta jest równy:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $1\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{4}{5}$

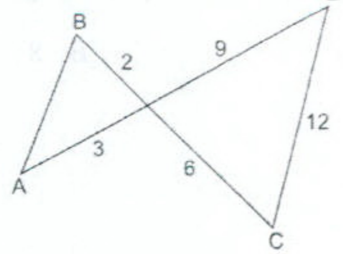
Zadanie 12. **(*1 pkt*)**
Miara kąta α, zaznaczonego na rysunku, jest równa:



A. 35° **C.** 70°

B. 55° **D.** 110°

Zadanie 13. **(*1 pkt*)**
Długość odcinka AB, równoległego do odcinka CD, jest równa:



A. 6 **C.** 2

B. 3 **D.** 4

Zadanie 14. **(*1 pkt*)**
Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

A. 36π **B.** 9π **C.** $18\sqrt{3}\pi$ **D.** 12π

Zadanie 15. **(*1 pkt*)**
W trapezie prostokątnym kąt ostry ma miarę $60°$, a podstawy mają długość 6 i 9. Wysokość tego trapezu jest równa:

A. 6 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 16. **(*1 pkt*)**
Prostą prostopadłą do prostej $y=\frac{1}{2}x-1$ i przechodzącą przez punkt $A=(1,1)$ opisuje równanie:

A. $y=2x-1$ **B.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ **C.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ **D.** $y=-2x+3$

Zadanie 17. **(*1 pkt*)**
Długość odcinka AB, którego wierzchołki mają współrzędne $A=(-3,-2)$ i $B=(-1,4)$, jest równa:

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{10}$ **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{41}$

Zadanie 18. **(*1 pkt*)**
Objętość kuli o promieniu $r=\pi$ dm jest równa:

A. $\frac{4}{3}\pi\ \text{dm}^3$ **B.** $\frac{4}{3}\pi^4\ \text{dm}^3$ **C.** $\frac{3}{4}\pi^4\ \text{dm}^3$ **D.** $\frac{3}{4}\pi^3\ \text{dm}^3$

Zadanie 19. **(*1 pkt*)**
W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

A. $x=6$ **B.** $x=8$ **C.** $x=10$ **D.** $x=12$

Zadanie 20. **(*1 pkt*)**
Objętość walca, w którym wysokość jest trzykrotnie dłuższa od promienia podstawy, jest równa 24π. Zatem promień podstawy tego walca ma długość:

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 6

ZADANIA OTWARTE

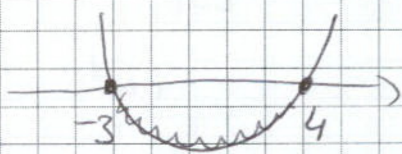
Rozwiązania zadań o numerach od 24. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 21. (2 *pkt*)
Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność: $x^2 - x - 12 \le 0$.

$\Delta = 49$

$x_1 = -3$

$x_2 = 4$



$x \in \langle -3, 4 \rangle$

Zadanie 22. (2 *pkt*)
Liczby 2, $\log_{\frac{1}{2}} x$, 8 są (w podanej kolejności) wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz x.

$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2+8}{2}$ $\quad D: x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = 5$

$x = \frac{1}{32}$

Zadanie 23. (2 *pkt*)

Uzasadnij że $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

$\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}} \quad /()^2$

$5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}$

$8+2\sqrt{15}=8+2\sqrt{15}$

$L=P$

cnd.

Zadanie 24. (2 *pkt*)

Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego: $\dfrac{2x^2+2x+4}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$.

$x^4+3x^3-4x^2-12x \neq 0$

$x^3(x+3)-4x(x+3)\neq 0$

$(x^3-4x)(x+3)\neq 0$

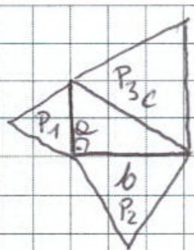
$x(x^2-4)(x+3)\neq 0$

$x(x-2)(x+2)(x+3)\neq 0$

$x\neq 0 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2 \wedge x\neq -3$

$D: \; x\in R-\{-3,-2,0,2\}$

Zadanie 25. (2 *pkt*)
Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano trójkąty równoboczne. Wykaż, że pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól figur zbudowanych na przyprostokątnych.



T $P_1 + P_2 = P_3$

D $P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$P_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

$P_3 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

$P_1 + P_2 = P_3$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \quad / : \frac{\sqrt{3}}{4}$

$a^2 + b^2 = c^2$

PRAWDA cnd.

Zadanie 26. (2 *pkt*)
Spośród dodatnich liczb dwucyfrowych losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb parzystych.

$\overline{\overline{\Omega}} = 90 \cdot 89$

$\overline{\overline{A}} = 45 \cdot 44$

$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{22}{89}$

Zadanie 27. (4 *pkt*)

Okrąg o środku w punkcie $S = (-3, 4)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

Oblicz współrzędne punktu styczności.

$y = ax + b$

$a_{\perp} = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}x + b \quad \wedge \quad S(-3, 4)$

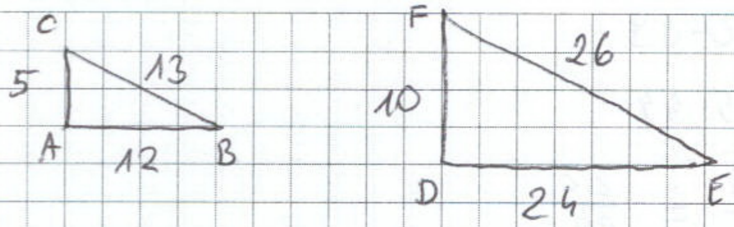
$4 = \frac{3}{4}(-3) + b \implies b = \frac{25}{4}$

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

Odp. $P(1, 7)$

Zadanie 28. (4 *pkt*)

Trójkąty prostokątne ABC i DEF są podobne. Przyprostokątne trójkąta ABC mają długości 5 i 12, a przeciwprostokątna trójkąta DEF ma długość 26. Wyznacz pole trójkąta DEF.



$|BC| = 13$

$\Downarrow$

$k = 2$

$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

$P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$

Zadanie 29. (5 *pkt*)

Pewien kierowca, jadąc z miasta A do miasta B, zmierzył czas i prędkość jazdy. Drogę powrotną pokonał z prędkością o 12 km/h większą, w czasie o 12 minut krótszym. Z jaką średnią prędkością wracał kierowca do miasta A, jeżeli wiadomo, że miasta te są oddalone od siebie o 117 km..

x – prędkość

y – czas

$12 min = \frac{12}{60} h = \frac{1}{5} h$

$$\begin{cases} x \cdot y = 117 \\ (x+12)\left(y - \frac{1}{5}\right) = 117 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = \frac{117}{x}$$

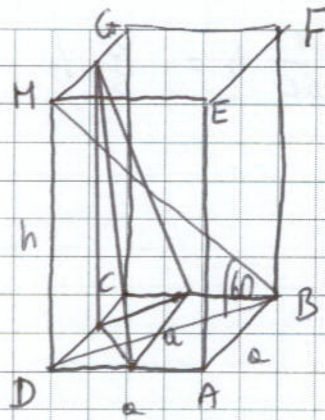
$$(x+12)\left(\frac{117}{x} - \frac{1}{5}\right) = 117$$

...

$\underline{\underline{x = 78}} \rightarrow V_w = 78 + 12 = 90 \frac{km}{h}$

Odp. Kierowca wracał z prędkością $90 \frac{km}{h}$

Zadanie 30. (5 *pkt*)
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ połączono punkty będące środkami krawędzi BC, CD, AD i GH. Wyznacz objętość powstałej bryły wiedząc, że $|DB| = 5\sqrt{2}$ i kąt DBH ma miarę $60°$.



$|DB| = a\sqrt{2} \Rightarrow \underline{a = 5}$

$\frac{|DH|}{|DB|} = tg\, 60°$

$\frac{h}{5\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{1}{12} \cdot 25 \cdot 5\sqrt{6} = \frac{125\sqrt{6}}{12}$